Лекция 3. Моделирование случайных событий.

Моделирование простых событий

В предыдущей теме было отмечено, что основной принцип моделирования различных случайных закономерностей сводится к моделированию базовой последовательности случайных чисел с равномерным распределением на отрезке [0, 1] и к ее последующему преобразованию.

Для удобства преобразований случайные числа равномерной последовательности представим в виде независимых реализаций z случайной величины ξ. Обозначение ξ в дальнейшем закрепим только за случайной величиной, имеющей равномерное распределение на отрезке [0, 1].

Использование случайных чисел для моделирования случайных закономерностей начнем с наиболее простой закономерности – случайного события.

Пусть событие A наступает с вероятностью $P(A) = p$.

Сформулируем теорему 1. Пусть p – вероятность наступления события A, а z – независимая реализация случайной величины ξ. Тогда для наступления события A необходимо выполнить условия $z \le p$.

Доказательство. $p = P(A) = P\{\xi \le p\} = \int\limits_0^P f(z)dz = \int\limits_0^P 1 \cdot dz = p$.

Алгоритм, реализующий условие этой теоремы, включает 7 шагов.

Шаг 1. Положить $j = 1$.

Шаг 2. Получить реализацию z случайной величины ξ.

Шаг 3. Проверить условие $z \le p$. При нарушении этого условия перейти на шаг 5.

Шаг 4. Фиксировать число S наступления события A.

Шаг 5. Положить $j = j + 1$.

Шаг 6. Проверить условие $j > n$, где n – число независимых испытаний. При нарушении этого условия перейти на шаг 2.

Шаг 7. Вывод значения S.

Моделирование полной группы событий

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – полная группа несовместных событий с заданными вероятностями $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \dots & A_n \\ p_1 & p_2 \dots & p_n \end{pmatrix}$,

где $p_k = P\{A_k\},\ k = 1, 2, ..., n,\ \sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1.$

Для моделирования полной группы событий также воспользуемся случайными числами $z \in [0, 1]$. Предварительно отрезок [0, 1] разделим на участки Δ_k такие, что длина $\Delta_k = p_k$ (рисунок 3).

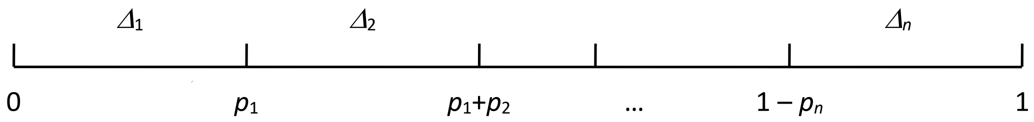

Рисунок 3

Сформулируем теорему 2. Пусть z – независимая реализация случайной величины ξ. Тогда каждое из несовместных событий A_k, образующих полную группу событий, наступает с вероятностью p_k при выполнении условия $z \in \Delta_k$.

Алгоритм, моделирующий полную группу событий и основанный на теореме 2, реализует следующие шаги.

Шаг 1. Положить $j = 1$.

Шаг 2. Получить реализацию z случайной величины ξ.

Шаг 3. Положить $k = 1$.

Шаг 4. Проверить условие $z \in \Delta_k$. При выполнении условия перейти на шаг 6.

Шаг 5. Положить $k = k + 1$. Возврат на шаг 4.

Шаг 6. Фиксация результатов наступления события A_k ($S_k = S_k + 1$).

Шаг 7. Положить $j = j + 1$.

Шаг 8. Проверить условие $j > n$, где n – заданное число опытов. При нарушении этого условия переход на шаг 2.

Шаг 9. Вывод значений $\{S_k\}$.

Проверку условия $z \in \Delta_k$ на шаге 4 обычно реализуют следующим образом. Полученное на шаге 2 случайное число z сравнивают с p_1. Если $z < p_1$, то произошло событие A_1, если $z>p_1$, z сравнивают с $p_1 + p_2$. Если $z < p_1+ p_2$, то произошло событие A_2, в противном случае z сравнивают с $p_1 + p_2 + p_3$ и т.д.

Среднее число таких сравнений определяется формулой

$$t = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot p_k + (n-1) p_n .$$

Известен ряд способов уменьшения величины t, из которых можно выделить простой способ упорядочения, состоящий в том, что события A_k перенумеровываются так, чтобы величины p_k располагались в порядке убывания.

Моделирование сложных событий

Событие является сложным, если результат его исхода зависит от двух и более событий. Сложные события делятся на независимые и зависимые. Сложное событие является независимым, если составляющие его простые события также независимы. Например, два студента, проживающие в одной комнате общежития, должны сдавать экзамен. Пусть событие A соответствует успешной сдаче экзамена первым студентом, а событие B – вторым. Очевидно, эти простые события можно считать независимыми. Возможными исходами сложного события в этом случае будут события $AB,\ A\overline{B},\ \overline{A}B,\ \overline{A}\overline{B}$ с вероятностями $p_A p_B,\ (1-p_A)p_B,\ \ p_A(1-p_B),\ (1-p_A)(1-p_B)$.

Для моделирования совместных испытаний воспользуемся условиями теоремы 1.

Алгоритм, реализующий условия этой теоремы применительно к сложному событию, состоящему из двух простых событий A и B, имеет следующий вид.

Шаг 1. Положить j = 1.

Шаг 2. Получить две независимые реализации zj , zj+1 случайной величины ξ.

Шаг 3. Проверить выполнение условий zj $\le$ pA и z j+1 $\le$ pB.

Шаг 4. В зависимости от результатов сравнений на шаге 3 прибавить единицу к одному из счетчиков:

$$S_{AB} = S_{AB} + 1,\ S_{\overline{A}B} = S_{\overline{A}B} + 1,\ S_{A\overline{B}} = S_{A\overline{B}} + 1,\ S_{\overline{A}\overline{B}} = S_{\overline{A}\overline{B}} + 1 .$$

Шаг 5. Положить $j = j + 2$.

Шаг 6. Проверить условие $j \le 2n$, где n – заданное число испытаний. При выполнении этого условия переход на шаг 2.

Шаг 7. Вывод содержимого счетчиков.

Рассмотрим теперь случай, когда события A и B являются зависимыми. В предыдущем примере о двух студентах сделаем предположение, что они молодожены и возможный провал одного из них существенно отражается на бюджете молодой семьи и окажет определенное влияние на исход экзамена для второго студента. В этом случае кроме вероятностей p_A и p_B задана условная вероятность $p_{B/A}$.

При моделировании сложных зависимых событий также удобной является схема моделирования простых событий, основанная на теореме 1.

Конкретный алгоритм для моделирования сложных зависимых событий, состоящий из двух простых событий, ненамного сложнее предыдущего алгоритма.

Шаг 1. Положить $j = 1$.

Шаг 2. Вычислить условную вероятность $P(B/\overline{A}) = P_{B/\overline{A}}$.

Шаг 3. Получить реализацию z_j случайной величины ξ.

Шаг 4. Проверить выполнение условия $z_j \le p_A$. Результат этой проверки фиксируется одним из следующих двух счетчиков $S_A = S_A + 1,\ S_{\overline{A}} = S_{\overline{A}} + 1$.

Шаг 5. Получить реализацию z_{j+1} случайной величины ξ.

Шаг 6. В зависимости от результата сравнения на шаге 4 проверить выполнение одного из следующих двух условий:

$z_{j+1} \le P_{B/A}$ или $z_{j+1} \le P_{B/\overline{A}}$.

Шаг 7. По результатам сравнений на шаге 6 прибавить единицу к одному из счетчиков $S_{AB} = S_{AB} + 1,\ S_{\overline{A}B} = S_{\overline{A}B} + 1,\ S_{A\overline{B}} = S_{A\overline{B}} + 1,\ S_{\overline{A}\overline{B}} = S_{\overline{A}\overline{B}} + 1$.

Шаг 8. Положить $j = j + 2$.

Шаг 9. Проверить условие $j \le 2n$. При выполнении этого условия переход на шаг 3.

Шаг 10. Вывод содержимого счетчиков.

Для вычисления на шаге 2 условной вероятности $P_{B/\overline{A}}$ используется формула полной вероятности

$$P_{B/\overline{A}} = \frac{P_B - P_A P_{B/A}}{1 - P_A}.$$

Контрольные вопросы:

1. Чему равна сумма вероятностей полной группы событий?
2. Приведите алгоритм моделирования простого события.
3. Приведите алгоритмы моделирования сложных событий.